DISCRETE MATHEMATICS 9 (1974) 235–238. © North-Holland Publishing Company

REMARQUE SUR LE POLYTOPE DES COUPLAGES D'EDMONDS

M. GONDRAN

Direction des Etudes et Recherches de l'Electricité de France, 92 Clamart, France

Reçu le 17 mai 1974*

Résumé. En utilisant les résultats d'Edmonds on montre que l'on peut réduire fortement le nombre des contraintes à ajouter pour obtenir le polytope des couplages.

1. Introduction

Etant donné un graphe fini $G = (X, E)$, on appelle *couplage* un ensemble E_0 d'arêtes tel que deux quelconques des arêtes de E_0 soient non-adjacentes.

Ainsi un couplage est une solution réalisable du système $\{(1), (2)\}$.

(1) $Ay \leq 1$,

(2) $y_i = 0$ ou 1,

où A est la matrice d'incidence aux arêtes du graphe G et où les y_i correspondent aux m arêtes $e_i \in E$ du graphe.

En remarquant que (1) entraîne $y_i \leq 1$ pour tout i, le système précédent est équivalent au système $\{(1), (3), (4)\}$.

(1) $Ay \leq 1$,

(3) $y_i \geq 0$,

(4) $y \in Z^m$.

Le problème du *couplage maximum* est de trouver un couplage ayant un nombre maximum d'arêtes, c.a.d. maximiser $\Sigma_{e_i \in G}\, y_i$. On remarque que nous avons un problème de programmation classique s'il n'existait pas la contrainte d'intégrité (4). Or, dans le cas où la matrice A est totalement unimodulaire, tous les points extrêmes du polyèdre defini par (1) et (3) sont entiers. C'est le cas des graphes ne comportant pas de cycles impairs, c'est-à-dire des graphes biparties.

Les algorithmes de resolution du problème du couplage maximum seront donc dans ce cas assez simples. Ce sera en particulier la résolution par l'algorithme de flots de Ford et Fulkerson.

Nous nous intéresserons ici au cas ou la graphe G n'est pas bipartie.

* Première version reçue le 15 août 1973.

Pour la résolution de ce type de problème, l'enveloppe convexe des couplages ou des points entiers du système $\{(1), (3)\}$, que nous appellerons polytope des couplages, est d'un grand intérêt. Dans [1] Edmonds détermine ce polytope par l'adjonction au système $\{(1), (3)\}$ des contraintes

(5) $\sum_{e_i \in G_S} y_i \leq \frac{1}{2}(|S| - 1)$ pour tous sous graphes, G_S $(S \subset X)$ de G d'ordre impair.

Nous montrerons ici que l'on peut réduire fortement le nombre des contraintes à rajouter.

Théorème.[1] *Le polytope des couplages d'un graphe $G = (X, E)$ est obtenu en ajoutant au système $\{(1), (3)\}$ les contraintes*

(6) $\sum_{e_i \in G_S} y_i \leq \frac{1}{2}(|S| - 1)$

pour tous les sous graphes 2-connexes G_S d'ordre impair contenant au moins un cycle impair.

2. Démonstration

Lemme 1. *Si on a les relations (1), (3) et (6) pour un graphe G, on aura les relations équivalentes pour tous sous graphes de G.*

Evident.

Lemme 2. *Pour tout graphe $G = (X, E)$, le système (1) entraine* $\sum_{e_i \in G} y_i \leq \frac{1}{2}|X|$.

Evident par sommation des lignes de (1).

Lemme 3. *Pour tout graphe $G = (X, E)$ sans cycles impairs, le système $\{(1), (3)\}$ entraîne $\sum_{e_i \in G_S} y_i \leq \frac{1}{2}(|S| - 1)$ pour tous sous graphes G_S de G d'ordre impair.*

Evident puisque, A étant totalement unimodulaire, max $\sum_{e_i \in G_S} y_i$ doit être entier et plus petit ou égal que $\frac{1}{2}|S|$ (Lemme 2).

La démonstration du théorème se fera alors par induction sur l'ordre n du graphe.

Le théorème étant vrai pour $n = 1, 2, 3$, on supposera donc que pour

[1] Dans un article récent [2], Pulleyblank et Edmonds donnent une caractérisation théorique très intéressante des contraintes actives du polytope des couplages.

tout graphe G d'ordre plus petit ou égal à $n - 1$, les inégalités (1), (3) et (6) définissent le polytope des couplages de G, c'est-à-dire d'après le théorème d'Edmonds [1] que ces inégalités entraînent (5). Considérons alors un graphe $G = (X, E)$ d'ordre n.

Si n est pair ou si n est impair sans que G admette un point d'articulation, les inégalités d'Edmonds (5) sont vérifiées d'après la récurrence. Si n est impair sans que G admette un cycle impair le Lemme 3 entraîne les inégalités d'Edmonds. Si n est impair et admet un point d'articulation x_0 il décompose G en au moins deux sous graphes disjoints G_{S_1} et G_{S_2} tel que $S_1 \cup S_2 \cup \{x_0\} = X$.

Considérons alors deux cas.

Cas 1. $|S_1|$ *est impair* ($\Rightarrow |S_2|$ *impair*). On peut alors écrire

$$\sum_{e_i \in G} y_i = \sum_{e_i \in G_{S_1}} y_i + \sum_{e_i \in G_{S_2}} y_i + \sum_{x_0 \in e_i} y_i \,.$$

Or

$$\sum_{e_i \in G_{S_1}} y_i \leq \tfrac{1}{2}(|S_1| - 1) \quad \text{et} \quad \sum_{e_i \in G_{S_2}} y_i \leq \tfrac{1}{2}(|S_2| - 1)$$

d'après la récurrence.

$$\sum_{x_0 \in e_i} y_i \leq 1$$

d'après (1). Ces trois inégalités donnent la relation (5) pour G.

Cas 2. $|S_1|$ *est pair* ($\Rightarrow |S_2|$ *pair*). On peut alors écrire

$$\sum_{e_i \in G} y_i = \sum_{e_i \in G_{S_1 \cup \{x_0\}}} y_i + \sum_{e_i \in G_{S_2 \cup \{x_0\}}} y_i \,.$$

Or

$$\sum_{e_i \in G_{S_1 \cup \{x_0\}}} y_i \leq \tfrac{1}{2}(|S_1| + 1 - 1) \quad \text{et} \quad \sum_{e_i \in G_{S_2 \cup \{x_0\}}} y_i \leq \tfrac{1}{2}(|S_2| + 1 - 1)$$

d'après la récurrence. Ces deux inégalités donnent alors la relation (5) pour G.

Références

[1] J. Edmonds, Maximum matching and a polyhedron with (0, 1) vertices, J. Res. Natl. Bur. Standards, Sect. B 69 (1965) 125–130.
[2] W. Pulleyblank and J. Edmonds, Facets of 1-matching polyhedra, University of Waterloo, Research Report CORR 73-3 (March 1973).